

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

В. о. Декана факультету  
Математики і інформатики

Євген МЕНЯШОВ



2025 р.

## РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Методи оптимізації

рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ перший (бакалаврський) \_\_\_\_\_

галузь знань \_\_\_\_\_ 11– Математика та статистика \_\_\_\_\_

спеціальність \_\_\_\_\_ 113 Прикладна математика \_\_\_\_\_

освітня програма \_\_\_\_\_ Прикладна математика \_\_\_\_\_

спеціалізація \_\_\_\_\_

вид дисципліни \_\_\_\_\_ обов'язкова \_\_\_\_\_

факультет \_\_\_\_\_ математики і інформатики \_\_\_\_\_

2025/2026 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики  
"26" серпня 2025 року, протокол №10

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: *Ревіна Тетяна Володимирівна*, кандидат фіз.-мат.наук, доцент  
кафедри прикладної математики факультету математики і інформатики,

Програму схвалено на засіданні кафедри Прикладної математики  
Протокол від "26" серпня 2025 року №13

Завідувач кафедри Прикладної математики

 Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми (керівником проектної групи)  
Прикладна математика

Гарант освітньо-професійної програми  
(керівник проектної групи) Прикладна математика

 Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики  
і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

Протокол від "26" серпня 2025 року №1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики

  
(підпис)

Євген МЕНЯЙЛОВ  
(прізвище та ініціали)

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Методи оптимізації**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра

спеціальності (напряму) 113 – Прикладна математика

спеціалізації \_\_\_\_\_

### 1. Опис навчальної дисципліни

#### 1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни є навчання майбутніх спеціалістів формалізувати математичні задачі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами.

#### 1.2. Основні завдання вивчення дисципліни:

оволодіння майбутніми спеціалістами методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв'язання математичних задач оптимізації, уміння отримувати змістовні висновки.

1.3. Кількість кредитів – 3

1.4. Загальна кількість годин – 90

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<u>обов'язкова</u>	
Денна форма навчання	Заочна(дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
2-й	
Семестр	
3-й	
Лекції	
16 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
–	
Самостійна робота	
42 год.	
в тому числі індивідуальні завдання	
-	

#### 1.6. Перелік компетентностей, що формує дана дисципліна:

ІК01.Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проєктування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.

ФК18. Здатність оцінити рівень математичного обґрунтування методів, які застосовуються для розв'язання конкретних прикладних задач.

### 1.7. Перелік результатів навчання, що формує дана дисципліна:

РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.

РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.

РН05. Уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень.

РН10. Володіти методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв'язання математичних задач оптимізації, дослідження операцій, оптимального керування і прийняття рішень, аналізу даних.

РН22. Уміти отримувати змістовні висновки, наводити та аналізувати приклади і контрприкладів, перевіряти і обґрунтовувати правильність застосованих міркувань і отриманих розв'язків.

1.8. Пререквізити: ОК5 Математичний аналіз, ОК7 лінійна алгебра, ОК8 Дискретна математика.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни.

### Розділ 1. Класичні задачі оптимізації і методи їх розв'язання.

#### *Тема 1. Класичні задачі оптимізації і методи їх розв'язання.*

- Постановка оптимізаційної моделі: змінні, цільова функція, обмеження. Переваги та недоліки оптимізаційних моделей. Типи задач – дискретна оптимізація, неперервна оптимізація.
- Функції багатьох змінних. Лінії рівня. Часткові похідні. Необхідна умова екстремуму (теорема Ферма).
- Метод найменших квадратів знаходження функціональної залежності між змінними. Приклад: лінійна і квадратична залежність.
- Задача відокремлення двох класів лінійною гіперплощиною – Support Vector Machine. Приклад: Iris flower dataset.

- Метод динамічного програмування. Геометрична та економічна інтерпретація задач. Принцип оптимальності Белмана. Багатокроковий процес прийняття рішень. Приклад: задача «золота гора», задача про рюкзак, задача про розподіл ресурсів, задача про оптимальні інвестиції.

## **Розділ 2. Абстрактна теорія лінійного програмування.**

### ***Тема 2. Введення в задачі лінійного програмування (ЛП).***

- Типові задачі математичного програмування: задача про розкрій матеріалів, задача виробничого планування, задача просуміші, задача про призначення, задача оптимального розміщення, задача про розподіл ресурсів, задача про перевезення, задача про три верстати (задача Джонсона), задача комівояжера.
- Загальна форма задачі ЛП та її інтерпретація в  $n$ -вимірному просторі.
- Властивості задач ЛП. Стандартна форма задачі ЛП. Нормальна форма задачі ЛП: основна екстремальна властивість кутових точок множини допустимих розв'язків.
- Методи побудови канонічної форми задачі ЛП: метод штучних змінних. Метод Жордана-Гауса.
- Структура множини оптимальних розв'язків.
- Цілочислові задачі ЛП. Постановка цілочислових задач ЛП. Економічна та геометрична інтерпретація.
- Задачі дробово-лінійного програмування.
- Багатокритеріальні задачі ЛП.

### ***Тема 3. Методи розв'язку задач ЛП.***

- Геометричний метод для розв'язування задач ЛП. Застосування пакету Geogebra.
- Симплексний алгоритм для розв'язування задач ЛП.
- Табличний симплекс метод. Напрямний рядок і напрямний стовпчик.
- Програмування симплексного алгоритму мовою Python.
- Виродженість і зациклювання у задачах ЛП.
- Принцип двоїстості в задачах ЛП. Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач. Двоїстий та змішаний алгоритм розв'язування задачі ЛП. Економічна інтерпретація двоїстої задачі.
- Цілочислові задачі ЛП. Метод Гоморі визначення оптимального плану задачі цілочислового ЛП. Метод гілок і границь визначення оптимального плану задачі цілочислового ЛП.
- Задачі дробово-лінійного програмування та методи їх розв'язання.
- Багатокритеріальні задачі ЛП та методи їх розв'язання на основі однокритеріальної оптимізації: метод головної компоненти, метод комплексного критерію, лексикографічний метод, метод поступок, метод ідеальної точки, метод умовного центра мас. Методи на основі інтегрального критерію: адитивний, мультипликативний, максимінний критерій, метод призначення вагових коефіцієнтів.

## **Розділ 3. Транспортна задача.**

### ***Тема 4. Транспортна задача та методи її розв'язання.***

- Постановка різних типів транспортних задач. Задача оптимізації вартості прокладання кабелю.
- Зведення задач з неправильним балансом до задач із правильним балансом.
- Методи знаходження початкового опорного плану: метод північно-західного кута (NWCM), метод мінімального елемента (метод найменших витрат LCM), метод подвійної переваги, метод апроксимації Фогеля (VAM). Приклади знаходження початкового опорного плану.
- Методи знаходження оптимального плану: метод потенціалів, метод диференціальних рент, метод циклів. Приклади розв'язування транспортних задач.
- Угорський метод розв'язання транспортних задач.
- Транспортна задача за критерієм часу та методи її розв'язання.
- Транспортна задача в мережевій формі і методи її розв'язання.
- Транспортна задача з проміжними пунктами перевезення.
- Задача про перевезення і методи її розв'язання.
- Комп'ютерне моделювання транспортних задач за допомогою електронних таблиць.

### 3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
Л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
<b>Розділ 1. Класичні задачі оптимізації і методи їх розв'язання.</b>						
Тема 1. Класичні задачі оптимізації і методи їх розв'язання.	16	2	6			8
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>16</b>	<b>2</b>	<b>6</b>			<b>8</b>
<b>Розділ 2. Абстрактна теорія лінійного програмування.</b>						
Тема 2. Введення в задачі лінійного програмування	19	3	6			10
Тема 3. Методи розв'язку задач ЛП.	20	4	6			10
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>39</b>	<b>7</b>	<b>12</b>			<b>20</b>
<b>Розділ 3. Транспортна задача.</b>						
Тема 4. Транспортна задача та методи її розв'язання.	31	7	10			14
<i>Контрольна робота</i>	4		4			
<b>Разом за розділом 3</b>	<b>35</b>	<b>7</b>	<b>14</b>			<b>14</b>
<b>Усього годин</b>	<b>90</b>	<b>16</b>	<b>32</b>			<b>42</b>

### 4. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Функції багатьох змінних. Лінії рівня. Часткові похідні. Необхідна умова екстремуму (теорема Ферма).	1
2	Метод найменших квадратів знаходження функціональної	2

	залежності між змінними. Приклад: лінійна і квадратична залежність.	
3	Задача відокремлення двох класів лінійною гіперплощиною – Support Vector Machine. Приклад: Iris flower dataset.	1
4	Метод динамічного програмування. Геометрична та економічна інтерпретація задач.	2
5	Загальна форма задачі ЛП та її інтерпретація в n-вимірному просторі. Еквівалентні перетворення до стандартної та нормальної форми. Геометрична інтерпретація задачі ЛП	2
6	Канонічна форма задачі ЛП: метод Жордана-Гауса перетворення канонічних форм та канонічних розв'язків	1
7	Метод штучних змінних перетворення стандартної форми до канонічної форми	1
8	Геометричний метод для розв'язування задач ЛП	2
9	Симплекс метод для розв'язування задач ЛП	2
10	Табличний симплекс метод. Напрямний рядок і напрямний стовпчик.	1
11	Програмування симплексного алгоритму мовою Python.	1
12	Застосування принципу двоїстості до розв'язання задач лінійного програмування.	1
13	Постановка різних типів транспортних задач. Задача оптимізації вартості прокладання кабелю.	1
14	Зведення задач з неправильним балансом до задач із правильним балансом.	1
15	Методи знаходження початкового опорного плану: метод північно-західного кута (NWCM), метод мінімального елемента (метод найменших витрат LCM). Приклади знаходження початкового опорного плану	3
16	Методи знаходження оптимального плану: метод потенціалів, метод циклів. Приклади розв'язування транспортних задач	4
17	Написання та захист контрольної роботи	4
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Ознайомитися з оптимізаційними моделями	4
2	Розібрати типові задачі динамічного програмування: задача «золота гора», задача про рюкзак, задача про розподіл ресурсів, задача про оптимальні інвестиції.	4
3	Розібрати типові задачі математичного програмування: задача про розкрій, задача виробничого планування, задача про дієту, задача про призначення, задача оптимального розміщення, задача про розподіл ресурсів, задача про перевезення, задача про три верстати (задача Джонсона), задача комівояжера.	6
4	Ознайомитися з постановками цілочислових задач ЛПта їх економічною та геометричною інтерпретацією	2
5	Ознайомитися з задачами дробово-лінійного програмування.	2
6	Боротьба з виродженістю і зациклюванням у задачах ЛП.	1
7	Ознайомитися зі змішаним алгоритмом розв'язування задачі ЛП	1

8	Розібрати метод Гоморі визначення оптимального плану задачі цілочислового ЛП	1
9	Розібрати метод гілок і границь визначення оптимального плану задачі цілочислового ЛП	1
10	Ознайомитися з методами розв'язання задач дробово-лінійного програмування.	1
11	Ознайомитися з багатокритеріальними задачами ЛП та методами їх розв'язання на основі однокритеріальної оптимізації: метод головної компоненти, метод комплексного критерію, лексикографічний метод, метод поступок, метод ідеальної точки, метод умовного центра мас.	3
12	Ознайомитися з багатокритеріальними задачами ЛП та методами їх розв'язання на основі інтегрального критерію: адитивний, мультипликативний, максимінний критерій, метод призначення вагових коефіцієнтів.	2
13	Розібрати методи знаходження початкового опорного плану: метод подвійної переваги, метод апроксимації Фогеля (VAM).	2
14	Розібрати метод диференціальних рент знаходження оптимального плану	1
15	Розібрати угорський метод розв'язання транспортних задач	2
16	Ознайомитися з транспортною задачею за критерієм часу та методами її розв'язання.	2
17	Ознайомитися з транспортна задачею в мережевій формі і методами її розв'язання	2
18	Ознайомитися з транспортна задачею з проміжними пунктами перевезення і методами її розв'язання.	2
19	Ознайомитися з задачею про перевезення і методами її розв'язання.	2
20	Комп'ютерне моделювання транспортних задач за допомогою електронних таблиць.	1
	<b>Разом</b>	<b>42</b>

## 6. Індивідуальні завдання.

Не передбачені робочим планом

## 7. Методи навчання

- словесні (лекції, пояснення, навчальні дискусії)
- практичні (розв'язання задач)
- репродуктивний (розв'язання типових задач)
- методи узагальнення та конкретизації.

## 8. Методи контролю

- Контроль на практичних заняттях
- Контроль на лекціях

- проведення та перевірка контрольної роботи,
- проведення іспиту.

### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання						Іспит	Сума
Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
3	3	3	3	48	60	40	100

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час практичних занять.

Для допуску до складання підсумкового контролю (іспиту) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання.

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

#### Нарахування балів:

Поточний контроль – до 12 балів,  
Контрольна робота – до 48 балів,  
Іспит – до 40 балів.

**Контрольна робота** оцінюється у 48 балів. Робота складається з 3 практичних задач.

Зміст контрольної роботи:

1. За допомогою методу найменших квадратів знайти лінійну квадратичну залежність між змінними. Зробити геометричну інтерпретацію.
2. розв'язати задачу лінійного програмування двома методами – геометрично і симплекс методом, перевірити за допомогою комп'ютера (онлайн калькулятор або мова програмування Python)

3. розв'язати транспортну задачу: знайти початковий опорний план методом північно-західного кута або методом мінімального елемента, знайти оптимальний план методом потенціалів, або методом диференціальних рент.

Критерії оцінки по першому завданню.

- 10-14 – задача розв'язана до кінця, знайдено обидві залежності, можливі невеликі помилки,  
 5-9 – задача розв'язана неповністю, знайдено тільки одну залежність або немає геометричної інтерпретації,  
 0-4 – розв'язано менше половини задачі.

Критерії оцінки по другому завданню.

- 14-18 – задача розв'язана двома методами та перевірена за допомогою комп'ютера, можливі невеликі помилки,  
 6-13 – задача розв'язана одним із методів, другий не доведено до кінця, немає перевірки за допомогою комп'ютера,  
 0-5 – один із методів відсутній, немає доведеної до кінця відповіді у другому методу.

Критерії оцінки по третьому завданню,

- 11-16 – знайдено і початковий опорний план, і оптимальний план, можливі невеликі помилки,  
 5-10 – знайдено тільки один із планів, другий не доведено до кінця,  
 0-4 – знайдено неповністю тільки початковий план.

*Іспит* складається з трьох завдань і передбачає письмову відповідь на два теоретичних питання зі списку, який надається студентам заздалегідь, а також розв'язання практичної задачі. Кожне теоретичне завдання оцінюється максимально 15 балами, задача – 10 балами.

По кожному завданню залікової роботи нараховується:

- максимальний бал у разі правильно обґрунтованої відповіді;
- за незначні помилки оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків;
- за значні логічні помилки оцінка зменшується до 50 відсотків, якщо хід міркувань в цілому правильний;
- якщо відповідь не відповідає жодному з критеріїв – виставляється 0 балів.

## 10. Рекомендована література

1. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення. – 2008.
2. Грібова В. В. та ін. Конспект лекцій з дисципліни «Теорія ігор», розділ «Елементи лінійного програмування» Одеса : Одеська політехніка, 2023. – 49 с.
3. Дослідження операцій. Конспект лекцій / Уклад.: О.І. Лисенко, І.В. Алексєєва, – К: НТУУ «КПІ», 2016. – 196 с.
4. Дослідження операцій. Навчально-методичний посібник / Уклад.: В. В. Онищенко – К: Державний університет телекомунікацій, 2016. – 44 с.
5. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. – Київ: Слово, 2006. – 804 с.
6. Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Збірник задач. – Київ: Слово, 2007. – 462 с.
7. Зелінський, Ю. Б. Транспортна задача. Київ: КСУ, 2004.
8. Лінійне програмування: практикум з дисципліни «Методи оптимізації»[Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика»/ Т. С. Ладогубець, О. Д. Фіногенов. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 61 с

9. Моклячук М. П., Ямненко Р. Є. Теорія вибору та прийняття рішень //Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – 2018.
10. Транспортна задача [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»./ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. К. Молодід. – Електронні текстові дані– Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 37 с.
11. Eiselt H. A., Sandblom C.-L. Linear programming and its applications. Springer Science & Business Media, 2007.
12. Murthy P. Rama. Operations research (linear programming). Bohem press, 2005.

#### Допоміжна література

1. Мартинюк П. М., Мічута О. Р. Методи оптимізації та дослідження операцій. – 2011.
2. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
3. Рогоза Н. А., Шульга Н. Г., Галаєва Л. В. Дослідження операцій. – 2015.